Логарифмические задания на Едином Государственном Экзамене

Логарифмы и их свойства. Преобразования логарифмических выражений

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в который нужно возвести основание a, чтобы получить b.
Обозначение: $\log_a b$.
Десятичный логарифм - логарифм, основание которого равно 10. Обозначение: $\log_{10} x = \lg x$.
Натуральный логарифм - логарифм, основание которого равно $e \approx 2{,}7$. Обозначение: $\log_e x = \ln x$.

Свойства логарифмов:

1) $\log_a 1 = 0$ для любого положительного и отличного от единицы значения a.
2) $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3) $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.
4) $\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c|$
5) $\log_a (b/c) = \log_a |b| - \log_a |c|$

6) $\log_a b^p = p \log_a |b|$, если p нечетно, то формула принимает вид

$\log_a b^p = p \log_a b$.

7) $\log_{a^p} b = 1/p \log_a b$.

8) $\log_a b = \log_{a^p} b^p$ $(p \neq 0)$.

9) $\log_{a^p} b^m = m/p \log_a b$.

10) $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ – формула перехода к новому основанию.

11) $\log_{ac} b = \log_{|a|} b / (1 + \log_{|a|} |c|)$, $(ac > 0)$.

12) $\log_a p * \log_b p + \log_b p * \log_c p + \log_a p * \log_c p = (\log_a p * \log_b p * \log_c p) / \log_{abc} p$

13) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $(a>0, b>0, c>0, c\neq 1)$.

14) $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.
15) $\log_a b = 1/ \log_b a$.

Замечание. Указанные формулы, как и другие, используются в двух видах: слева направо и наоборот - справа налево.

Выражения и их преобразования. Значения выражений.

Пример 1. Упростите выражение $\lg 25 + 0{,}5\lg 16$.

1) $\lg 29$; 2) 2; 3) $\log 33$; 4) 10.

Решение. Применив свойство логарифма степени ко второму слагаемому, а затем свойство суммы логарифмов, получим:

$\lg 25 + 0.5\lg 16 = \lg 25 + \lg 4 = \lg(25 \cdot 4) = \lg 100 = 2.$

Ответ: 2.

Пример 2. Найдите значение выражения $6^{\log_6 12} - 17$.

1) -16; 2) -11; 3) -5; 4) 19.

Решение. В соответствии с основным логарифмическим тождеством первое слагаемое равно 12. Поэтому

$$6^{\log_6 12} - 17 = 12 - 17 = -5.$$

О т в е т: 3.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$3^{\frac{\log_2 7}{\log_4 3}}$$

Решение. Данное выражение представляет собой степень с основанием 3. Поэтому целесообразно привести к этому основанию и логарифмы, стоящие в числителе и знаменателе показателя степени:

$$\frac{\log_2 7}{\log_4 3} = \frac{\log_3 7}{\log_3 2} : \frac{\log_3 3}{\log_3 4} = \frac{\log_3 7 \times \log_3 2^2}{\log_3 2} = \frac{\log_3 7 \cdot 2\log_3 2}{\log_3 2} = 2\log_3 7 = \log_3 49.$$

Применив основное логарифмическое тождество, получим:

$$3^{\frac{\log_2 7}{\log_4 3}} = 3^{\log_3 49} = 49.$$

О т в е т: 49.

Пример 4. Найдите значение выражения

$$0{,}5^{\log_2 0.04} + \log_{\sqrt{7}} 0{,}5 - \log_{1/7} 4.$$

Решение. Значение первого слагаемого можно найти с помощью основного логарифмического тождества:

$$0{,}5^{\log_2 0{,}04} = (2^{-1})^{\log_2 0{,}2^2} = (2^{-1})^{\log_2 5^{-2}} = 5^2 = 25.$$

Применяя ко второму и третьему слагаемому формулы

$\log_a b^n = n\cdot\log_a b$ и $\log_{a^m} b = (1/m)\log_a b$, получаем:

$\log_{\sqrt{7}} 0{,}5 = \log_{7^{1/2}} 2^{-1} = 2*(-1)*\log_7 2 = -2\log_7 2$, и $\log_{1/7} 4 = \log_{7^{-1}} 2^2 = -2\log_7 2$.

Окончательно получаем: $25 - (-2\log_7 2) + (-2\log_7 2) = 25$.

О т в е т: 25.

Уравнения

Определение. Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная находится только под знаком логарифма или в основании логарифма (или то и другое одновременно).

$\log_2 x(x+2)=3$, $\log_x (x^2 + 1) = 2$ – логарифмическое, но $x\lg x = 10$ – уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифмической функции.

При решении логарифмических уравнений наиболее употребительны следующие **методы**:

1) *решение уравнений, основанное на определении логарифма;*
2) *решение с помощью операции потенцирования;*
3) *применение основного логарифмического тождества;*
4) *использование операции логарифмирования;*
5) *переход к логарифму по новому основанию;*
6) *введение нового неизвестного;*

Полезные советы:

1) При решении логарифмических уравнений, в первую очередь, надо обратить внимание на основание логарифма. Если в уравнении встречаются разные основания, то следует попытаться привести к одному основанию.
2) Если в логарифмическом уравнении логарифмы приведены к одному и тому же основанию, то надо попробовать выделить какое-то выражение, входящее в уравнение, для того, чтобы, обозначив это выражение через другую переменную, можно было бы получить уравнение относительно этой переменной, как правило, не содержащее логарифмической функции.
3) Решение логарифмических уравнений, как правило, сопровождается рядом ограничений на входящую в них переменную и основание, а поэтому обычно невозможно соблюсти равносильность при выполнении преобразований. В результате различных преобразований возможно расширение области определения исходного уравнения или снятие каких-то ограничений, а это может привести к появлению посторонних корней. Следовательно, необходимо выполнять проверку. Если число не входит в область определения заданного уравнения, то оно не является корнем этого уравнения. Если же число принадлежит области определения исходного уравнения, то это еще не означает, что оно является корнем этого уравнения, нужно проверить это число непосредственной подстановкой в исходное уравнение.
4) Если же исходное уравнение удалось представить в виде $\log_a (f)x = g(x)$, то его корни можно искать из соотношения $f(x) = a^{g(x)}$.

При решении логарифмических уравнений следует обратить внимание учащихся на то, что применение следующих формул:

$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$,

$\log_a m/n = \log_a m - \log_a n$,

$\log_a m^k = k \log_a m$,

может привести как к приобретению, так и к потере корней уравнения.

Пример 5. Укажите промежуток, которому принадлежит меньший корень уравнения

$$\log_2 x(x+2) = 3$$

1) $(-\infty;-2]$; 2) $(-2; 2)$; 3) $[2; 4]$; 4) $(4; +\infty)$.

Решение. По определению логарифма получаем: $x(x+2)^3 = 2^3$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Корнями этого уравнения являются числа $x = -4$ или $x = 2$.

Ответ: 1.

Замечание. При решении этого примера мы пользовались только определением логарифма. Никаких преобразований, сулящих потерю равносильности, не было. Поэтому вовсе необязательно в решении приводить, например, такое обоснование: «В соответствии с определением произведение $x(x + 2)$, стоящее в исходном уравнении под знаком логарифма, может принимать только положительные значения. В уравнении $x\cdot(x+2)=2^3$ это выражение положительно, так как $2^3 > 0$. Следовательно, эти уравнения равносильны, т.е. либо имеют одни и те же корни, либо оба не имеют корней».

При решении уравнений, заменяя выражение $\log_a m + \log_a n$ выражением $\log_a mn$, можно получить посторонние корни. Выявить их можно двумя способами:

1) выполняя преобразования уравнения, сохранять область определения исходного уравнения, т.е. записывать систему, состоящую из полученного уравнения и неравенств, задающих область определения исходного уравнения;
2) проверить полученные корни подстановкой в исходное (и только в исходное!) уравнение. Покажем оба способа решения.
3) **Пример 6.** Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3.$ (1)

1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-2; 2)$; 3) $[2; 4]$; 4) $(4; +\infty)$.

Решение.

1 способ. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \log_2 x(x + 2) = 3, \\ x>0, \\ x+2>0, \end{cases}$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} \log_2 x(x + 2) = 3, \\ x >0. \end{cases}$$

Решая уравнение $\log_2 x(x + 2) = 3$, получаем: $x = -4$ или $x = 2$. Число -4 не удовлетворяет условию $x > 0$, т.е. является посторонним корнем.

Число 2 удовлетворяет условию $x > 0$, значит, является корнем исходного уравнения. Этот корень принадлежит промежутку, указанному в третьем варианте ответа.

Ответ: 3.

2 способ. Используя формулу: $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$, данное уравнение можно представить в виде

$$\log_2 x(x + 2) = 3.$$

Далее получаем:

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Следовательно, $x = -4$ или $x = 2$.

Проверка. $\log_2 2 + \log_2(2 + 2) = 1 + 2 = 3$, значит, число 2 - корень исходного уравнения.

Выражения $\log_2(-4)$ и $\log_2(-4 + 2)$ не определены, следовательно, число - 4 - посторонний корень.

О т в е т: 3.

Так же осмотрительно надо осуществлять замену выражения $\log_a m - \log_a n$ выражением $\log_a n/m$.

Пример 7. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения
$\log_4(2x - 3) - \log_4(3x - 2) = 1$.
1) [-4; -1,5); 2) [-1,5; 0); 3) [0; 2); 4) корней нет.
<u>Решение.</u> Воспользуемся свойством разности логарифмов и, учитывая область определения логарифмической функции, получим равносильную данному уравнению систему

$$\begin{cases} \log_4 (2x - 3)/(3x - 2) = 1, \\ 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

Из определения логарифма следует, что уравнение системы равносильно уравнению
$\underline{2x - 3} = 4$.
Число 0,5 — его корень. Он не удовлетворяет неравенству системы. Таким образом, уравнение $\log_4(2x - 3) - \log_4(3x - 2) = 1$ не имеет корней.

О т в е т: 4.

Замечание. Замена выражения $\log_a m^k$ выражением к $\log_a m$, наоборот, при четных **к** может привести к потере корней.
Избежать в этом случае потери корня можно двумя способами:
1) использовать определение логарифма, а не формулу степени логарифма;
2) использовать понятие модуля числа.
Покажем оба способа решения.
Пример 8. Укажите промежуток, которому принадлежит меньший корень уравнения
$\log_2 x^2 = 4$.
1) $(-\infty; 4]$; 2) $(-2; 2)$; 3) $[2; 4]$; 4) $(4; +\infty)$.
<u>Решение.</u>
Iспособ. По определению логарифма получаем уравнение $x^2 = 2^4$ равносильное данному. Полученное уравнение равносильно уравнению $x^2 = 16$, корнями которого являются числа 4 и - 4.

Ответ: 1.

II *способ.* Данное уравнение равносильно уравнению $2 \cdot \log_2|x| = 4$, а значит, и уравнению $\log_2 |x| = 2$.
По определению логарифма получаем равносильное последнему уравнение $|x| = 2^2$, корнями которого являются числа 4 и - 4.

Ответ: 1.

Пример 9. Найдите меньший корень уравнения

$\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}$.

Решение. Так как логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел, то $-x > 0$, или $x < 0$. Поэтому решения надо искать на множестве отрицательных чисел.
Но тогда $\sqrt{x^2} = -x$ и уравнение принимает вид $\sqrt{\lg(-x)} = \lg(-x)$.
Сделав замену $\sqrt{\lg(-x)} = t$, приходим к уравнению $t = t^2$, корнями которого являются числа $t = 0$ и $t = 1$, откуда $x = -1$ или $x = -10$.

В ответ запишем, как требуется в условии, меньший корень.

Ответ: -10.

Пример 10. Решите уравнение

$$\frac{\log_3(x^2+2x)}{\log_3(x^2-4x-4)} = \frac{\log_5 8}{\log_5(x^2-4x-4)}.$$

Решение. В уравнении есть логарифмы с разными основаниями. Поэтому, первым делом, приведем все логарифмы к одному основанию, например, к основанию 3.

Тогда $\log_5 8 = \dfrac{\log_3 8}{\log_3 5}$ и $\log_5(x^2-4x-4) = \dfrac{\log_3(x^2-4x-4)}{\log_3 5}$,

а уравнение принимает вид

$$\frac{\log_3(x^2+2x)}{\log_3(x^2-4x-4)} = \frac{\log_3 8}{\log_3(x^2-4x-4)}$$

Далее получаем:

$\log_3(x^2+2x) = \log_3 8$,

$x^2 + 2x = 8$, откуда $x = 2$ или $x = -4$. Однако при $x = 2$ значение выражения $x^2 - 4x - 4$ равно -8, поэтому число 2 не является корнем исходного уравнения.

Ответ: - 4.

Пример 11. Решите уравнение

$$\sqrt{105 - 8/\log_x 2} = 3\log_2 0{,}5x\sqrt[3]{x}.$$

Решение. 1) Так как x — основание логарифма, то $x > 0$, $x \neq 1$. При таких значениях x определена правая часть уравнения и равносильны следующие преобразования частей уравнения:

$8/\log_x 2 = 8\log_2 x$ и $3\log_2 0{,}5x\sqrt[3]{x} = 3\log_2 0{,}5x^{4/3} =$

$= 3\left(\log_2 2^{-1} + 4/3\log_2 x\right) = 4\log_2 x - 3.$

Получаем уравнение

$\sqrt{105 - 8\log_2 x} = 4\log_2 x - 3.$

2) Пусть $t = \log_2 x$. Тогда

$\sqrt{105 - 8t} = (4t - 3)$, $105 - 8t = (4t-3)^2$,

$105 - 8t = 16t^2 - 24t + 9$,

$16t^2 - 16t - 96 = 0$,

$t^2 - t - 6 = 0$,

$t = 3$, $t = -2$.

3) Подставляем число - 2 вместо $\log_2 x$ в уравнение

$$\sqrt{105 - 8\log_2 x} = 4\log_2 x - 3,$$

получаем неверное равенство

$\sqrt{105+16} = -8 - 3.$

При $t = 3$ получаем $\sqrt{105-24} = 12-3$, $\sqrt{81} = 9$, что верно.

4) Значит, $\log_2 x = 3$, $x = 2^3 = 8$.

Ответ: 8.

Замечание. Можно было обозначить буквой t выражение $4\log_2 x$.

Пример 12.

Решите уравнение $3\log_6 (3 - 3/(2x + 3)) = 4 \log_6 (2 + 1/(x + 1))$.

Решение. Выполняя тождественные преобразования, получаем:

$3(\log_6 6 + \log_6 ((x + 1)/(2x + 3))) = 4 \log_6 ((x + 1)/(2x + 3))^{-1} + 3;$

$3 + 3 \log_6 ((x + 1)/(2x + 3)) = -4 \log_6 ((x + 1)/(2x + 3)) + 3;$

$7 \log_6 ((x+1)/(2x+3)) = 0.$

По определению логарифма: $\dfrac{x + 1}{2x + 3} = 1.$

Решим полученное уравнение: $\begin{cases} x + 1 = 2x + 3 \\ 2x + 3 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x \neq 1,5. \end{cases}$

Итак, $x = -2$. Проверим найденный корень подстановкой в исходное уравнение: $3\log_6 (3 - 3/(2(-2) + 3)) = 4 \log_6 (2 + 1/((-2) + 1))$.

$3 \log_6 6 = 4 \log_6 1 + 3;$

$3 = 3$ — верно, т.е. $x = -2$ — корень исходного уравнения.

Ответ: -2.

Пример 13. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$\log^2_3 x - (2a + 3) \log_3 x + a^2 + 3a = 0$

имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x = 42$.

Решение. Введем обозначение $t = \log_3 x$. Уравнение примет вид:

$$t^2 - (2a + 3)t + a^2 + 3a = 0.$$

Его корни — числа: $t = a + 3$ и $t = a$.

Следовательно, $\log_3 x = a + 3$ или $\log_3 x = a$.

Отсюда получаем:

$x_1 = 3^{a+3}$, $x_2 = 3^a$.

Точка $x = 42$ равноудалена от точек x, и x_2, т.е. она является серединой отрезка с концами в этих точках. Воспользуемся формулой координаты середины отрезка

$$(3^{a+3} + 3^a)/2 = 42.$$

Далее получаем:

$((3^3 + 1) * 3^a) = 42,\quad 3^a = 3,\quad a = 1.$

Ответ: a = 1.

Неравенства

Между методами решений логарифмических уравнений и логарифмических неравенств есть существенные **отличия:**

1)Для решения логарифмических неравенств необходимо установить характер монотонности соответствующей логарифмической функции в зависимости от величины её основания.

2)Решением неравенства, как правило, является бесконечное множество чисел, и значит, о выполнении проверки найденных решений не может быть и речи, поскольку в отличие от уравнений это просто невозможно. Поэтому при решении логарифмических неравенств особое значение приобретает умение проводить равносильные преобразования неравенств.

При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать, что

1. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\mathbf{\log_a f(x) \geq b}$ <=> $\begin{cases} f(x) \geq a^b, \text{ если } a > 1, \\ 0 < f(x) \leq a^b, \text{ если } 0 < a < 1. \end{cases}$

2. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\mathbf{\log_a f(x) \leq b}$ <=> $\begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, \text{ если } a > 1, \\ f(x) \geq a^b, \text{ если } 0 < a < 1. \end{cases}$

3. $\mathbf{\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x)}$ <=> $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1, \end{cases} \end{array} \right.$

4. $\mathbf{\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)}$ <=> $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) \leq g(x), \\ h(x) > 0, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases} \end{array} \right.$

Имеется не менее 4 принципиально различных типов подхода к решению логарифмических неравенств:

А)перебор случаев «основание больше единицы», «основание меньше единицы»;

Б)переход к равносильным совокупностям систем неравенств, не содержащих логарифмов;

В)обобщенный метод интервалов;

Г)графический метод.

Решая логарифмические неравенства, нужно так же крайне аккуратно пользоваться свойствами логарифмов, т.е. формулами

$\log_a m*n = \log_a m + \log_a m$,

$\log_a m/n = \log_o m - \log_a n$,

$\log_a m^k = k*\log_a m$.

Решениями могут быть лишь те значения переменных, при которых выражения, стоящие под знаком логарифма, принимают только положительные значения.

Пример 14. Решите неравенство $\log_5(2x+3)>\log_5(x-1)$.

1) (1; + ∞); 2) (0; +∞); 3) (- ∞ ; -4); 4) (-4; +∞).

Решение. Так как функция $f(t) = \log_5 1$ определена и возрастает на промежутке (0; +∞), то данное неравенство равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 2x + 3 > x - 1 \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

Решая неравенства системы, получаем $\begin{cases} x > -4 \\ x > 1. \end{cases}$

Таким образом, решением данного неравенства является промежуток (1;+ ∞).

О т в е т. 1.

Пример 15. Решите неравенство

$\log_{1/2}(2x - 5) < -2$.

1) (- ∞;4,5); 2) (0;+ ∞); 3) (2,5; 4,5); 4) (4,5; + ∞).

Решение. Представим правую часть неравенства в виде логарифма с основанием 1/2. Получим неравенство

$$\log_{1/2}(2x - 5) < \log_{1/2} 4.$$

Так как функция $f(x) = \log_{1/2} t$ определена и убывает на промежутке (0; + ∞), то данное неравенство равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 2x-5>4, \\ 2x-5>0. \end{cases}$$

Данная система равносильна неравенству

$2x - 5 > 4$, или $x > 4,5$.

Таким образом, решением данного неравенства является промежуток (4,5; + ∞).

О т в е т: 4.

Пример 16. Найдите наибольшее решение неравенства

$\log_{2,5}(x + 3) \le 1/3 \log_{15,6\,25}(x^3 + 117)$. Решение.

$15,625 = 2,5^3$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$\log_{2,5}(x + 3) \le 1/3 \log_{2,5}(x^3 + 117)$, а значит, и неравенству

$3 \log_{2,5}(x + 3) \le \log_{2,5}(x^3 + 117)$,

или

$$\log_{2,5}(x + 3)^3 \le \log_{2,5}(x^3 + 117),$$

Логарифмическая функция с основанием большим единицы возрастает, следовательно, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x+3)^3 \le x^3 + 117 \\ x > -3. \end{cases}$$

Возведя в первом неравенстве системы двучлен $x + 3$ в куб, соберем все слагаемые в левую часть и приведем подобные. Получим:

$$\begin{cases} 9x^2 + 27x - 90 \le 0 \\ x > -3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 10 \le 0 \\ x > -3. \end{cases}$$

Решением этой системы, и, значит, исходного неравенства, является промежуток $(-3; 2]$.

Ответ: 2

Пример 17. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\log_2|\sqrt{x-16} - 4| < 8 + 71og_{0,25}(x - 8\sqrt{x-16}).$$

Решение. Прежде чем приступить к решению неравенства, обратим внимание на то, что $|\sqrt{x-16} - 4|^2 = x - 8\sqrt{x-16}$.

Поэтому, учитывая, что $0,25 = 2^{-2}$, преобразуем логарифм, стоящий в правой части неравенства:

$$7\log_{0,25}(x - 8\sqrt{x-16}) = 7\log_{0,25}|\sqrt{x-16} - 4|^2 = -7\log_2|\sqrt{x-16} - 4|$$

Значит, неравенство можно записать в виде

$$\log_2|\sqrt{x-16} - 4| \le 8 - 71og_2|\sqrt{x-l6} - 4|, \quad \text{откуда}$$

$$\log_2|\sqrt{x-16} - 4| < l, \quad \log_2|\sqrt{x-16} - 4| < \log_2 2.$$

Логарифмическая функция с основанием 2 монотонно возрастает, поэтому последнее неравенство равносильно

$0 < |\sqrt{x-16} - 4| \le 2$, что равносильно системе

$$\begin{cases} |\sqrt{x-16} - 4| \le 2 \\ \sqrt{x-16} \ne 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x-16} \ge 2 \\ \sqrt{x-16} \le 6 \\ \sqrt{x-16} \ne 4. \end{cases}$$

Возведя в квадрат левые и правые части первых двух неравенств системы, получим:

$$\begin{cases} x \ge 20 \\ x \ge 52 \\ x \ne 32. \end{cases}$$

Решением этой системы является множество $[20; 32) \cup (32;52]$.

Найдем сумму целых решений исходного неравенства как сумму членов арифметической прогрессии, в которой первый из 33 членов равен 20, последний равен 52, разность прогрессии равна 1, вычтя из полученной суммы 32, имеем:

$((20 + 52)/2)*33 - 32 = 1188-32 = 1156.$

Ответ: 1156.

Решить неравенство: $\log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) \le 1$.

Решение: (подход Б). Данное неравенство равносильно совокупности следующих систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 0,5x < 1 \\ 0,25x^2 - 1,25x + 1,5 < 0,5x \end{cases} \\ \begin{cases} 0,5x > 1 \\ 0 < 0,25x^2 - 1,25x + 1,5 \\ 0,25x^2 - 1,25x + 1,5 < 0,5x \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0,25(x^2 - 7x + 6) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ 0,25(x - 1)(x - 6) \le 0 \\ 0 < 0,25(x - 2)(x - 3) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 6 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ 1 \le x \le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2 \\ x \ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 0 < x \le 1 \\ 3 < x \le 6 \end{array}\right. \iff x \in (0; 1] \cup (3; 6].$$

Решение: (подход В). Функция $f(x) = \log_{0,5x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) - 1$ определена и непрерывна $x \in (0; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Найдем ее нули: $\log_{05x}(0,25x^2 - 1,25x + 1,5) = 1$,

$0,25(x^2 - 7x + 6) = 0$, $x, = 1$, $x2 = 6$.

Определяем знаки функции

$f(8) = \log_4 7,5 - 1 > 0$, $f(4) < 0$, $f(2,5) > 0$, $f(1,5) > 0$, $f(0,5) < 0$. Значит,

$f(x) < 1 \iff x \in (0; 1] \cup (3; 6]$.

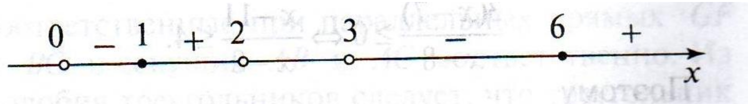


Рис. 1

Решение 4 (подход Г). Найдем точки пересечения графиков $y_1 = 0,5x$ и

$y_2 = 0,25x^2 — 1,25x + 1,5$.

$0,25x^2 - 1,25x + 1,5 = 0,5x$,

$0,25(x^2 - 7x + 6) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Первый график — прямая, второй график — парабола, ветви вверх.

Если $0 < y_1 < 1$, то

$\log_{y1} y_2 \le 1 \iff y_2 \ge y_1 \iff 0 \le x \le 1$.

Если $y_1 > 1$, то $\log_{y1} y_2 \le 1 \iff 0 < y_2 \le y_1 \iff 3 < x \le 6$.

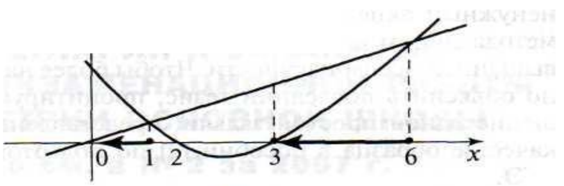


Рис. 2

Значит,

$\log_{y_1} y_2 \le 1$ <=> x e (0;l] U(3;6].

Пример 19. Найдите область определения функции $y = 2 - \sqrt{\log_{03} x}$.
1) $(0; +\infty)$; 2) $(0; 0{,}09]$; 3) $[0{,}09; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$.

Решение. Функция $f(t) = \sqrt[4]{t}$ определена на промежутке $[0; +\infty)$, поэтому

$$2 - \log_{0,3} x \geq 0, \quad \text{т.е. } \log_{0,3} x \leq 2.$$

Представим правую часть полученного неравенства в виде логарифма с основанием 0,3:
$\log_{0,3} x \leq \log_{0,3} 0{,}09$.

Поскольку функция $f(t) = \log_{0,3} t$ определена и убывает на промежутке $(0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно неравенству $x \geq 0{,}09$.

Значит, решением данного неравенства является промежуток $[0{,}09; +\infty)$.

Ответ. 3.

Пример 20. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_{0,5}(0{,}25 - x^2)$.

Решение. Функция $y = \log_{0,5} t$ монотонно убывает на всей области определения. Поскольку область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел, то $0{,}25 - x^2 > 0$. Отсюда следует, что

$$(x - 0{,}5)(x + 0{,}5) < 0, \quad -0{,}5 < x < 0{,}5.$$

Таким образом, функция $y = \log_{0,5}(0{,}25 - x^2)$ определена на множестве $(-0{,}5; 0{,}5)$.

График квадратичной функции $t = 0{,}25 - x^2$ — парабола, вершина которой находится на оси ординат в точке $(0; 0{,}25)$, а ветви направлены вниз.

Поэтому свое наибольшее значение 0,25 эта функция достигает при $x = 0$.

При $x \in [0; 0{,}5]$ значения функции $t = 0{,}25 - x^2$ непрерывно убывают от 0,25 до 0, а при $x \in [-0{,}5; 0]$ — непрерывно возрастают от 0 до 0,25.

Следовательно, на промежутке $(-0{,}5; 0]$ функция $y = \log_{0,5}(0{,}25 - x^2)$ непрерывно убывает, принимая наименьшее значение $y(0) = 2$, а на промежутке $[0; 0{,}5)$ непрерывно возрастает, принимая наименьшее значение $y(0) = 2$.

Итак, наименьшее значение заданной функции равно 2.

Ответ 2.

Пример 21.

Найдите множество значений функции

$$7 = \log_{0,1}(300/(1 + \lg(100 + x^2))).$$

Решение.

1)Сначала найдем множество значений функции $y=100+ x^2$: $E(x^2) = [0; +\infty)$, следовательно, $E(100+x^2) = [100; +\infty)$.

2) Так как функция $y = \lg t$ — непрерывна и при неограниченном увеличении аргумента неограниченно возрастает, то $E(\lg(100 + x^2)) = [\lg 100; +\infty) = [2; +\infty)$.

Значит, $E(1 + \lg(100 + x^2)) = [3; +\infty)$.

3) Так как функция $y = 1/t$ непрерывна и убывает на промежутке $[3; +\infty)$, то

$E(1/(1 + \lg(100 + x^2))) = (0; 1/3]$,

$E(300/(1 + \lg(100 + x^2))) = (0; 100]$.

4)Поскольку функция $y = \log_{0,1} t$ — непрерывна, убывает на $(0; +\infty)$ и принимает все значения из интервала $(-\infty; +\infty)$, то на промежутке $(0; 100]$ она имеет наименьшее значение, равное $\log_{0,1} 100 = -2$. Следовательно, $E(y) = [\log_{0,1} 100; +\infty) = [-2; +\infty)$.

Ответ: $[-2; +\infty)$.

Задание 42. Укажите область определения функции $y = \log_3(x + 3)$, график которой изображен на рис. 1.

1) $(-3;+\infty)$; 2) $(-2;+\infty)$; 3) **$(1; +\infty;)$**; **4)** $(-\infty; +\infty)$.

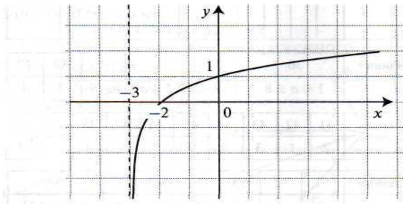


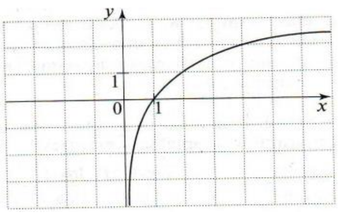
Рис. 1

Ответ: 1

ЕГЭ.

Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.

1) $y = 2^x$ 2) $y = \log_2 x$ 3) $y = 0{,}5^x$ 4) $y = \log_{0,5} x$.



На рисунке изображен график возрастающей функции, принимающей как положительные так и отрицательные значения (часть графика расположена над осью абсцисс). Из предложенных четырех функций оба эти свойства имеет только $y = \log_2 x$. Ответ: 2.

Вычислите значение выражения $\dfrac{\log_7 36}{\log_7 6} - \log_{49}\sqrt{7}$.

Решение. Используя формулу перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\frac{\log_7 36}{\log_7 6} - \log_{49}\sqrt{7} = \frac{\log_7 (6)^2}{\log_7 6} - \frac{\log_7 7^{0,5}}{\log_7 (7)^2}.$$

По свойству логарифма степени получаем: $\dfrac{2\log_7 6}{\log_7 6} - \dfrac{0{,}5\log_7 7}{2\log_7 7} = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$

Найдите все значения $x > 3$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_3 x + 5\log_x 27 - 1$ и $b = 23 - \log^2_3 x$ не меньше 7.

Решение. Так как $x > 3$, то $\log_3 x > 1$. Далее в решении учитывая это условие

1) $a \geq 7 \Leftrightarrow \log_3 x + 5\log_x 27 - 1 \geq 7 \Leftrightarrow \log_3 x + 5*(\log_3 27/\log_3 x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{\log^2_3 x - 8\log_3 x + 15}{\log_3 x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x \geq 5\\ \log_3 x \leq 3.\end{array}\right.$

2) $b \geq 7 \Leftrightarrow 23 - \log^2_3 x \geq 7 \Leftrightarrow 16 - \log^2_3 x \geq 0 \Leftrightarrow (4 - \log_3 x)(4 + \log_3 x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \leq 4.$

3) наибольшее из чисел a и b не меньше 7 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них не меньше 7, т.е. когда

$$\left[\begin{array}{l}a \geq 7\\ b \geq 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x \geq 5\\ \log_3 x \leq 3\\ \log_3 x \leq 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x \geq 5\\ \log_3 x \leq 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 243\\ x \leq 81.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $x \geq 3$, получаем $3 < x \leq 81$ или $x \geq 243$.

Ответ: $3 < x \leq 81$, $x \geq 243$.